А.В. Яковлев,

г. Шадринск

Научный руководитель: М.Ю. Пермякова,

канд. пед. наук,

ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет»

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ЗАМЕНЫ МНОЖИТЕЛЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ НЕРАВЕНСТВ**

*Аннотация.* В статье рассматривается использование метода замены множителей при решении неравенств школьного уровня. Автор приводит таблицу основных замен множителей, пояснения и замечания к таблице, а также примеры с подробным решением неравенств данным методом. Автором предлагаются методические рекомендации для учащихся и учителей математики, выделяется ряд замечаний по использованию данного метода при решении неравенств.

***Ключевые слова:*** неравенства, ограничения, функция, замена множителей, рационализация, область допустимых значений, область определения, методы решения.

A.V. Yakovlev,

Shadrinsk  
Research advisor: M.Yu. Permyakova,  
candidate of pedagogical sciences,

Shadrinsk State Pedagogical University

**USING THE METHOD OF REPLACING THE MULTIPLIERS AT THE SOLUTION OF INEQUALITIES**

*Abstract.* The article deals with the use of the method of replacing multipliers in solving school-level inequalities. The author gives a table of the main replacement multipliers, explanations and comments to the table, as well as examples with a detailed solution of inequalities by this method. The author offers methodical recommendations for pupils and teachers of mathematics, a number of remarks on use of this method at the solution of inequalities is allocated.

***Keywords:*** inequality constraints, the function, the replacement of the multipliers, the optimization of the area of allowable values field definition, solution methods.

Одним из важнейших разделов школьной математики является решение неравенств. Грамотный аккуратный поиск решения неравенств с использованием тождественных, равносильных преобразований, является неотъемлемой частью школьного математического образования и способствует развитию логического и аналитического мышления. Применение разных приёмов и методов к решению стандартных неравенств и неравенств повышенной сложности значительно увеличивает шансы учащихся получить правильный и обоснованный ответ. Овладение этими методами способствует формированию предметных и личностных результатов обучения, формирует математическую культуру, развивает эстетические качества учащихся и, безусловно, расширяет багаж знаний.

К разряду классических методов решения неравенств относятся: метод интервалов, использование некоторых свойств функций (в том числе и анализ поведения функций), метод замены переменной. Однако, существуют и нестандартные методы решения, к которым относится, например, метод замены множителей. Этот метод позволяет сводить неравенства, содержащие сложные нерациональные функции (в частности, трансцендентные), к неравенствам, содержащим рациональные функции. Иначе говоря, «рационализировать» неравенства. Этот метод имеет много названий: метод рационализации, метод декомпозиции, метод знакотождественных множителей. Впервые данный метод был описан российским учёным, доктором физико-математических наук, академиком РАО Дорофеевым Георгием Владимировичем в статье «Обобщение метода интервалов» журнала «Математика в школе» (1969, №3) [2].

Метод применяется к неравенствам вида  (1) или  (2), где  – некоторые нерациональные функции,  – один из возможных знаков неравенства (). Суть метода состоит в том, что каждая нерациональная функция заменяется на рациональную, знак которой при любом значении переменной совпадает со знаком исходной функции. А так как выражение в левой части неравенства сравнивается с нулём, то при замене любого множителя на множитель того же знака, знак неравенства сохраняется. В результате таких преобразований, неравенство значительно упрощается. Сохранение знаков множителей при такой замене основывается на свойствах монотонного возрастания (убывания) функций и ограниченности функций, а также на основе решений простейших иррациональных неравенств и неравенств с модулем.

Наиболее часто используемые, основные замены знакосовпадающих множителей представим в таблице 1.

Таблица 1

ТАБЛИЦА ЗАМЕН МНОЖИТЕЛЕЙ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Основные замены знакосовпадающих множителей** | | | |
| **№ п/п** | **Ограничения** | **Множитель** | **Замена** |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |
| 5.1 | **Замечание.** Если , то разность  равна нулю. Этот случай рассматривается отдельно. | | |
| Множитель в числителе,  , |  | 0 |
| 6 |  |  |  |
| 7 |  |  |  |
| **Замены знакосовпадающих множителей на основе ограниченности** | | | |
| **№ п/п** | **Ограничения** | **Множитель** | **Замена** |
| 8 |  |  | *a* |
| 9 |  |  | 1 |
| 10 | , |  | 1 |
| 11 |  |  |  |
| 12 |  |  |  |

Если в неравенствах вида (1) или (2) в качестве функций  или  выступают множители, записанные в столбце «Множитель», то их можно заменить на соответствующие множители из столбца «Замена». Естественно, что, при избавлении от арифметических корней чётных степеней, показательных, показательно-степенных, логарифмических функций, область допустимых значений (ОДЗ) неравенства может расшириться, вследствие чего могут быть приобретены посторонние решения. Чтобы избежать этого, перед использованием метода замены множителей необходимо найти ОДЗ исходного неравенства, после чего производить замену или использовать метод равносильных преобразований, учитывая в системе с неравенством вновь возникающие ограничения. Все необходимые ограничения, которые нужно учесть при замене множителей, и условия, при которых возможны замены, указаны в столбце «Ограничения» таблицы 1. Кроме представленных в таблице замен существуют и другие, которые мы сознательно не приводим, т.к. их справедливость можно доказать, используя имеющиеся или используя свойства функций. Кроме того, неравенства, в случае необходимости, можно сводить к неравенствам, для которых справедливы указанные в нашей таблице замены.

***Замечание 1.*** В общем случае выражения  представляют собой функции от переменной *x.* Эти функции имеют собственные области определения, которые учитываются вследствие указанных замен и (или) при записи ограничений. В качестве выражения  могут выступать и константы. Примеры множителей: .

***Замечание 2.*** Ограничения, указанные в строках 3–7 таблицы 1 необходимо требовать для осуществления соответствующих замен в случае, если эти ограничения не требовались ранее. Если в качестве выражений , или  даны константы, удовлетворяющие ограничениям, то требовать ограничения, не нужно.

***Замечание 3.*** Если ограничения, указанные в строках 8–12 таблицы 1, известны изначально, то соответствующие им замены справедливы. Если изначально ограничение  не обязано выполняться, то его необходимо потребовать для осуществления замены, не забыв при этом отдельно рассмотреть случай . Ограничения  в 10 строке таблицы являются необходимыми условиями для осуществления замены.

Докажем справедливость замены в пункте 7 таблицы 1.

Пусть для каждого элемента множества *M* справедливы неравенства: , ,  и . Неравенство вида  (\*) равносильно неравенству , которое равносильно совокупности двух систем:  или  Преобразуем её следующим образом  или  Каждая система полученной совокупности равносильна неравенству  (\*\*). Следовательно, исходное неравенство (\*) равносильно неравенству (\*\*) на множестве *M*. Аналогично можно доказать справедливость замены для случаев, когда в неравенстве (\*) вместо знака  стояли бы знаки . Таким образом, мы доказали, что в неравенствах вида (1) или (2) разность значений монотонной логарифмической функции можно заменить разностью значений аргументов этой функции на ОДЗ неравенства. При этом, знак неравенства сохраняется.

С доказательствами справедливости других замен множителей можно ознакомиться, воспользовавшись источником [3].

***Пример 1.*** Решите неравенство .

Найдём ОДЗ: 

Решим неравенство (\*) методом замены множителей, используя 6 строку таблицы 1.

(\*)

 Таким образом, ОДЗ исходного неравенства является множество 

Исходное неравенство представим в виде . Решим это неравенство методом замены множителей на ОДЗ, используя 7 строку таблицы.













Решая последнее неравенство методом интервалов, получим: .

С учётом ОДЗ, решением исходного неравенства является множество 

***Пример 2.*** Решите неравенство

.

Найдём ОДЗ: Решением первого неравенства является закрытый луч . На этом множестве автоматически выполняются остальные неравенства системы, кроме , которое требует исключить значение переменной, равное 2. Таким образом, ОДЗ исходного неравенства является множество .

Решим исходное неравенство методом замены множителей на ОДЗ. В скобках будем указывать номера строк таблицы замен, используемых в решении. Преобразуем его следующим образом:

.

Рассмотрим числитель дроби в левой части неравенства.

Разность степеней  заменим на разность показателей , поскольку основание 3 больше 1, показательная функция монотонно возрастает (5).

Разность модулей  заменим на разность квадратов  и разложим её на множители по формуле разности квадратов (2).

Разность корней квадратных  заменим на разность подкоренных выражений  и раскроем скобки (4). Заметим, что ОДЗ предусматривает ограничение .

Рассмотрим знаменатель дроби в левой части неравенства.

Сумму корней четвёртых степеней  заменим на 1, поскольку на ОДЗ сумма квадратов подкоренных выражений не обращается в 0 (иначе говоря, подкоренные выражения не обращаются в 0 одновременно). Кстати, замена справедлива ещё и потому, что исходный множитель находится в знаменателе дроби (10). Разность степеней  заменим на разность оснований  (12).

Сумму восьмых степеней  заменим на 1, поскольку эта сумма положительна на ОДЗ.

В результате неравенство сохраняет знак и принимает вид:

.

Упростим его: .

Дискриминанты квадратных трёхчленов  и равны  и  соответственно, т.е. квадратные трехчлены положительны при любом значении переменной . Разделим на них обе части неравенства или заменим на 1 (8). Корнями квадратного трёхчлена  являются числа *1* и *4*.

Неравенство примет вид: . После решения этого неравенства методом интервалов получим, что .

С учётом ОДЗ, решением исходного неравенства является множество .

В источниках [1] и [4] можно найти задания для самостоятельного решения. В книге [1] имеется большое количество примеров с готовыми решениями.

В заключение укажем ряд методических рекомендаций и некоторые замечания:

– Прежде чем использовать данный метод желательно ознакомить учащихся с доказательствами справедливости каждой замены множителей и разобрать метод решения на конкретных примерах. Требовать от учащихся запоминания таблицы не следует. Важно привести учащихся к пониманию материала. Можно научить, глядя на отдельный нерациональный множитель вспоминать решения неравенств, в которых этот множитель сравнивался бы с нулём и какие преобразования осуществлялись бы с таким неравенством. За счёт чего, замены сами приходят на ум. Таблица же приведена в настоящей статье для начального ознакомления. Об ограничениях, указанных в таблице, также не сложно вспоминать самостоятельно, учитывая области определения функций и используя метод равносильных преобразований.

– Частой ошибкой при использовании данного метода является замена слагаемых. Замена касается именно множителей.

– Важно понимать, что замены справедливы не потому, что исходный нерациональный множитель равен тому, на который его можно заменить. Они не равны. Замены справедливы именно на основании совпадения знаков множителей.

– При решении задания 15 ЕГЭ по математике профильного уровня этот метод часто оказывается полезным и его можно использовать. Но, на ЕГЭ ещё ни разу не было заданий, при решении которых невозможно было бы использовать никакой другой метод, кроме метода рационализации, поэтому, брать данный метод за основу не следует. Наиболее важно научить учащихся грамотно использовать универсальные методы решения неравенств: метод интервалов, метод равносильных преобразований. А также не забывать другие не универсальные, но обязательно изучаемые в школе, например, метод замены переменной.

– Метод рационализации не является универсальным, не всегда применим, не всегда сокращает и упрощает решение. С другой стороны, этими свойствами, очевидно, не обладает ни один из методов решения. В то же время круг применения рационализации представляется достаточно широким.

Список используемых источников

1. Голубев, В. И. Решение неравенств методом рационализации [Текст] / В. И. Голубев ; под ред. А.В. Семенова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2018. – 80 с.
2. Дорофеев, Г. В. Обобщение метода интервалов [Текст] / Г. В. Дорофеев // Математика в школе. – 1969. – № 3. – С. 39-44.
3. Колесникова, С. И. Решение сложных задач ЕГЭ по математике: 9–11 классы [Текст] : Мастерская учителя математики / С. И. Колесникова. – М. : ВАКО, 2011. – 288 с.
4. Чикунова, О. И. Неравенства с модулями. Метод замены множителей [Текст] / О. И. Чикунова // Чикунова, О. И. Практикум. Уравнения, неравенства и их системы : пособие для учащихся 7-11 кл. // Готовимся к ЕГЭ без репетитора. – Шадринск: Шадринский Дом Печати, 2016. – С. 30-31.