УДК 510.2

Д.М. Гордиевских,
г. Челябинск

История развития и методы теории полугрупп

Проведен исторический обзор развития теории полугрупп, представлен перечень работ современных авторов по данной теории. Рассмотрены основные методы теории полугрупп.

Полугруппы, подполугруппы, идеалы.

D.M.Gordievskikh,
Chelyabinsk

History and methods of semigroup theory

The author conducted a historical overview of the development of the theory of semigroups, a list works by modern authors on the theory of semigroups. The basic methods of the theory of semigroups.

Keywords: *semigroup, subsemigroup, ideals*

Теория полугрупп - детище XX века. Понятие полугруппы и соответствующий термин возникли в начале века, а систематические исследования полугрупп начались в конце 20-х годов. К 60-м годам теория полугрупп сформировалась в динамично развивающуюся область алгебры с богатой проблематикой и разнообразными методами и тесными связями с многими областями математики, как собственно алгебраическими (в первую очередь, с теорией групп и теорией колец), так и другими, например функциональным анализом (полугруппы операторов в банаховых пространствах), дифференциальной геометрии (полугруппы частичных преобразований), алгебраической теорией автоматов (полугруппы автоматов)[2]. В те годы появились и первые монографии, целиком посвященные алгебраической теории полугрупп. Одним из основателей теории полугрупп был американский математик Эйнар Хилле (1894–1980). Родился 28 июня 1894 в Нью-Йорке. В 1918 Хилле защитил докторскую диссертацию в Стокгольмском университете. После этого продолжил образование в университете Гарварда, а также в университетах Копенгагена и Гёттингена. С 1922 работал в Принстонском университете, в 1933 стал профессором математики Йельского университета. В 1953 был избран членом Национальной академии наук США.

Основные труды Хилле посвящены функциональному анализу. Особый интерес он проявлял к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, интегральным уравнениям, рядам Дирихле и Фурье, преобразованиям Фурье и Лапласа и аналитическим полугруппам. Эйнар Хилле говорил: «Я приветствую полугруппу, где бы я ее ни встретил, а встречается она повсюду. Впрочем, от друзей я слышал, что в математике попадаются объекты, отличные от полугрупп». Эта фраза содержалась в предисловии к первому изданию его фундаментальной монографии, под названием «Функциональный анализ и полугруппы». На тот момент книга стала самым обширным собранием трудов по данной тематике.

После 1948 г. аналитическая теория полугрупп и ее приложения в своем развитии достигли значительных успехов. В 1948 г. Иосида независимо от Хилле открыл основную теорему о производящих операторах и применил ее в ряде важных статей к уравнению диффузии. Начиная с 1949 г. Хилле под влиянием работ Иосиды занялся задачей Коши, применяя методы теории полугрупп. Вскоре после этого Уильям Феллер (1906-1970) заинтересовался возможностями этого нового подхода и совместно со своими учениками внес большой вклад в теорию; в частности, можно отметить его глубокое исследование сингулярной краевой задачи для уравнения диффузии. Другим математиком, давно работавшим в общей теории полугрупп, был Ральф Филлипс (1913-1998). Ему удалось заполнить многие пробелы, которые оставил Хилле, и обогатить эту теорию, применив теорию представлений алгебр, теорию возмущений, обобщенные классы полугрупп и сопряженные полугруппы. Работая в другом направлении, Хилле в 1948 г. заложил основы теории полугрупп Ли. Когда в начале 1952 г. обнаружилась необходимость переиздания монографии Хилле, т.к. стало ясно, что успехи теории полугрупп требуют значительной ее переработки. Хилле обратился к Филлипсу с просьбой о сотрудничестве в подготовке нового издания. Первоначальный текст полностью переработан, в основном Филлипсом. План монографии и большинство старых результатов были сохранены, но очень многое добавлено. Так, в соответствии с духом времени алгебраический аппарат играет теперь большую роль и вводится он раньше; это позволяет более удовлетворительным образом построить операторное исчисление и спектральную теорию в гл. XV и XVI. С другой стороны, этот новый аппарат не заменил собою, а лишь существенно дополнил методы преобразования Лапласа - Стильтьеса, ранее примененные Хилле. Результатом работы стала новая монография Хилле Э., Филлипса Р., «Функциональный анализ и полугруппы». В данной работе внимание авторов было сосредоточено на вопросах, связанных с понятием однопараметрической полугруппы операторов, действующих в том или ином банаховом пространстве. Также в новую редакцию монографии Хилле добавлено изложение теории возмущений для полугрупп, расширено и переработано изложение теории банаховых алгебр (нормированных колец) [4].

Современная литература по функциональному анализу включает такие трактаты как: обобщенные функции, нормированные кольца (М.А.Наймарк), лекции по функциональному анализу (Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надя), линейные операторы (Н. Данфорд и Дж. Шварц) и т.д. Однако трактат Э. Хилле и Р. Филлипса как по своей тематике, так и по характеру изложения сильно отличается от всех этих трудов, и является фундаментальным в исследовании полугрупп.

Среди отечественных математикой у истоков развития теории полугрупп стояли: Ляпин Е.С., Скорняков Л.А., Сушкевич А.К. и д.р. Современные труды по теории полугрупп включают работы таких русских исследователей как Свиридюк Г.А. (уравнения соболевского типа, вырожденные полугруппы операторов, морфология фазовых пространств, неклассические уравнения математической физики, оптимальное управление, устойчивость решений, обратные задачи), Федоров В.Е. (Полугруппы операторов, вырожденные полугруппы, уравнения соболевского типа, оптимальное управление распределенными системами, управляемость уравнений, обратные задачи), Шеврин Л.Н. (теория многообразий, алгоритмические проблемы и производные структуры для ряда классических типов алгебраических систем: полугруппы, группы, ассоциативные и лиевые алгебры)[2] и д.р.

В настоящее время популярным направлением является использование методов теории полугрупп для изучения производных дробного порядка, используя аналитические методы [3], а также численные методы исследования [1].

Ключевым в данной теории и современной алгебре выступает понятие полугруппа.

Полугруппой называют множество с определённой на нём операцией, подчинённой закону ассоциативности. Понятие полугруппы есть обобщение понятия группы: из аксиом группы остаётся лишь одна; этим объясняется и термин «полугруппа» [6].

Всякая совокупность преобразований произвольного множества M, замкнутая относительно операции композиции (последовательного выполнения), будет полугруппой относительно этой операции; такова, в частности, совокупность всех преобразований множества M, называется симметрической полугруппой на множестве M. Многие важные совокупности преобразований оказываются полугруппами, причём часто они не являются группами. С другой стороны, всякая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе преобразований. Таким образом, именно понятие полугруппы оказывается наиболее подходящим для изучения в самом общем виде преобразований. В большой степени через рассмотрение преобразований осуществляются связи теории полугрупп с другими областями математики, такими, например, как современная дифференциальная геометрия, функциональный анализ, абстрактно-алгебраическая теория автоматов.

Примеры полугрупп в математике весьма многочисленны:

1. Аддитивная полугруппа натуральных чисел. Это и есть первая полугруппа, с которой встречается всякий начинающий изучать математику в начальной школе и с которой люди, можно сказать, не расстаются всю жизнь.
2. Мультипликативная полугруппа натуральных чисел. Это определенно вторая среди полугрупп, с которой знакомятся все изучающие математику.
3. Множество всех векторов на плоскости (или в пространстве) относительно сложения является группой.
4. Полугруппы матриц. Множество всех квадратных матриц данного порядка с элементами, например из Z (или из Q, или из R), относительно умножения является полугруппой [7].

Для определения сущности теории полугрупп следует определить ряд понятий, полезных для ее описания.

Прежде всего, отметим, что для краткости символ полугрупповой операции обычно опускается. Таким образом, запись ab, где $a \in S$, $b \in S$ а S - это полугруппа с операцией *, нужно интерпретировать как a*b. Аналогично,

$$A \subset S, B \subset S => AB := \{ab|a \in A, b \in B\}$$

Подмножество A полугруппы S называется подполугруппой, если оно замкнуто относительно полугрупповой операции, т. е. AA есть подмножество A. Если A непусто и AS (SA) лежит в A, то A называют правым (левым) идеалом. Если A является одновременно левым и правым идеалом, то его называют двусторонним идеалом, или просто идеалом.

Пересечение двух идеалов - также идеал; из этого следует, что полугруппа не может иметь более одного наименьшего идеала. Пример полугруппы, в которой нет наименьшего идеала - положительные целые числа с операцией вычитания. Если же наименьший идеал есть, а полугруппа коммутативна, то он является группой.

Подполугруппы, которые являются группами, называют также просто подгруппами. Существует тесная связь между подгруппами полугруппы и ее идемпотентными элементами. Каждая подгруппа содержит ровно один идемпотентный элемент - единицу этой подгруппы. Для каждого идемпотента e в полугруппе существует ровно одна максимальная подгруппа, содержащая e. Таким образом, порождается каждая максимальная подгруппа, а значит, существует взаимно-однозначное соответствие между идемпотентами и максимальными подгруппами полугруппы.

Частным случаем полугрупп являются полугруппы с делением, в которых для каждых двух элементов a и b определено правое (a/b) и левое (b\a) частное.

Итак, Эйнар Хилле, посвятивший себя функциональному анализу и линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, будучи основоположником теории полугрупп, оказал значительно влияние на развитие математической науки в целом, и на развитие функционального анализа, в частности. Идеи и методы функционального анализа, проникая в теории дифференциальных уравнений, вероятностей, теоретическую физику и другие разделы науки, открывают новые перспективы применения теории полугрупп, в рамках данных направлений науки, и новые горизонты исследования и развитие самой теории. Таким образом, теория полугрупп Хилле - Филипса и в настоящее время содержит ряд малоизученных вопросов, являясь актуальной для дальнейших диссертационных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гордиевских, Д.М. Численное решение некоторых вырожденных дифференциальных уравнений с дробной производной по времени [Элетронный ресурс] // Д.М. Гордиевских, П.В. Давыдов // Науковедение. Технические науки : Интернет-журн. – 2015. – Т. 7, № 1.

2. Полугруппа [Текст] // Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. – М. : Советская энциклопедия. – Т. 4. – М., 1984.

3. Свиридюк, Г.А. Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева [Текст] // Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров // Сибирский математический журнал. – 1995. – Т. 36, № 5. – С. 1130-1145.

4. Федоров, В.Е. Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени [Текст] / В.Е. Федоров, Д.М. Гордиевских // Известия вузов. Математика. – 2015. – № 1. – С. 71-83.

5. Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы [Текст] : монография / Э. Хилле, Р. Филлипс. – М. : Иностранная литература, 1962. – 830 с.

6. Шеврин, Л.Н. Полугруппы [Текст] // Общая алгебра / под ред. Л.А. Скорнякова. – М. : Наука, 1991. – Т. 2. – С. 11-191.

7. Шеврин, Л.Н. Тождества в алгебре [Текст] / Л.Н. Шеврин // Соросовский Образовательный Журнал. – 1996. – № 7. – С. 111-118.