УДК 517.9

Д.М. Гордиевских,
г. Челябинск

Интегро-дифференциальные операторы нецелого порядка и их физические применения

В статье дан краткий исторический обзор развития дробного исчисления, рассмотрены специальные функции математического анализа для работы с производными нецелых порядков. Рассмотрены дробные производные Капуто и Римана-Лиувилля.

Уравнение дробного порядка, дробная производная Капуто, дробная производная Римана-Лиувилля.

D.M.Gordievskikh,
Chelyabinsk

Integro-differential operators of non-integer order and their physical applications

The article gives a brief historical overview of the development of fractional calculus are considered special functions of mathematical analysis to work with non-integer-order derivatives. Considered Caputo fractional derivatives and the Riemann-Liouville.
Keywords: *fraction differential equation, Caputo fractional derivative, fractional derivative of Riemann-Liouville*

Математический анализ с использованием интегро-дифференциальных операторов нецелых порядков имеет более чем трехвековую историю.

Впервые упоминания о производных нецелого порядка встречаются в переписке Лопиталя и Лейбница. Последний, в письме, датированном 1695 г., обсуждая возможности дифференциалов порядка $1/2$, написал слова, ставшие пророческими: «…Из этого парадокса со временем будут выведены полезные следствия».

Весь XIX и первая половина XX века стала периодом накопления результатов и формирования дробного исчисления, как самостоятельного раздела математического анализа. В это же время появляются публикации таких физиков и математиков, как: Лаплас, Фурье, Риман, Абель, Лиувилль, Грюнвальда, Хэвисайда, Куранта и др. Значительный вклад в развитие математического анализа дробных порядков внес известный русский математик А.В. Летников. Первые публикации А.В. Летникова по дробному исчислению относятся к 1868-1872 г.г.

Новая волна интереса научного сообщества к дробному исчислению, произошла после публикации книги «Дробное исчисление» (K.B.Oldham, J.Spanier) в 1974 г. В этой книге систематически изложена теория дробного исчисления, а также рассмотрены области его применения [2].

С этого момента, начинают появляться тематические выпуски различных журналов, посвященные применениям дробного исчисления в различных областях науки, техники, естествознания.

В настоящее время дробное исчисление находится в процессе бурного развития, как в теоретическом плане, так и в его применениях. Данный раздел математического анализа превратился в инструмент математического моделирования сложнейших динамических процессов в различных (обычных и фрактальных) средах, позволяющий решать различные задачи анализа, синтеза, диагностики и создания новых систем управления [5].

2. Функции дробного математического анализа

В дробном математическом анализе часто встречаются функции, являющиеся обобщением широко известных и применяемых в классическом математическом анализе, в частности, экспоненциальной функции и факториала. Начнём сопоставление с рассмотрения этих функций.

Гамма функции Эйлера

Гамма-функцию можно определить следующим образом:

$$\Gamma(x) = \begin{cases} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, Re(x) > 0, \\ = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\, n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)} \end{cases}$$

Где x- любое. В качестве аргументов Гамма функции могут быть любые числа.

Для целых положительных $x = n$ гамма-функция связана с факториалом следующим образом:

$$\Gamma(n) = (n-1)!, n > 0$$

Кроме того, наряду с Гамма-функцией применяются функции, тесно связанные с ней. В частности это неполная Гамма-функция, Бэта-функция и Пси-функция [2]:

Неполная Гамма-функция определяется следующими выражениями:

$$\gamma(\mathrm{c}, x) = \frac{c^{-x}}{\Gamma(x)} \int_0^{x} y^{x-1} \exp(-y) dy = \exp(-x) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(j+c+1)}$$

Бэта-функция выражается через Гамма-функцию следующим образом:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Пси-функция связана с Гамма-функцией соотношением вида:

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{d\Gamma(x)}{dx}$$

Пси-функция обладает рядом интересных свойств, которые часто используются в дробном исчислении:

$$\psi(x+1) = \psi(x) + x^{-1}$$

$$\psi(n+1) = \psi(1) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

Функция Миттаг-Лефлера

Функция Миттаг-Лефлера [3,4] задается на множестве значений комплексного аргумента z с помощью бесконечного ряда и зависит от двух параметров α и β:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)}, \qquad \alpha \epsilon R_{+}, \qquad \beta \in R, \qquad z \in C$$

Если $\alpha = \beta = 1$, то приведенная формула определяет экспоненциальную функцию e^z

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

Функция Миттаг-Лефлера играет важную роль в решении интегро-дифференциальных уравнений нецелых порядков. Многие специальные функции могут быть выражены через функции Миттаг-Лефлера с различными параметрами. К таким функциям, в частности, относятся гиперболические синус и косинус, функции Миллера-Роса, Работнова и др. Подробнее об этом см. [4].

Дробный интеграл и производная Римана-Лииувилля

Одним из самых широко распространенных определенных производных и интегралов нецелых порядков является определения Римана-Лиувилля [2,3]. Данное определение, является обобщением интегральной формулы Коши на нецелые порядки.

$$\int_a^t \int_a^{t_n} \dots \int_a^{t_3} \int_a^{t_2} f(t_1)dt_1 dt_2 \dots dt_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{n-1}} d\tau$$

С введением производных и интегралов нецелых порядков стирается резкая граница между производными и интегралами. Таким образом, мы можем трактовать интегралы, как производные отрицательного порядка, а производные, соответственно, как интегралы отрицательного порядка. В математическом анализе нецелых порядков существует термин: диферинтеграл [2]. Обобщение интегральной формулы Коши на нецелых порядки интегро-дифференциальных операторов приводит к следующим определениям дифферинтегралов дробного (нецелых) порядков:

$$I_{a,t}^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau,$$

$$D_{a,t}^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau,$$

где: $\beta, \alpha \in R, n-1 < \beta < n.$

$I_{a,t}^{\beta}$ – интегральный оператор порядка β

$D_{a,t}^{\beta}$ – дифференциальный оператор порядка β

Рассмотренное определение производной и интеграла нецелых порядков не является единственным. Известны также определения интегро-дифференциальных операторов по Вейлю, Грюнвальд-Летникову, Капуто и др.

Дробная производная Капуто

Наибольший интерес для практических приложений представляет определение производных нецелого порядка по Капуто. Оно отличается от определения Римана-Лиувилля тем, что функция сначала подвергается дифференцированию с наименьшим целым порядком n, превышающим нецелый порядок β, а затем результат интегрируется с порядком $n-\beta$:

$$cD_{a,t}^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta-n)} \int_a^t \frac{f^n(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau,$$

где: $\beta, a \in R, \quad n-1 < \beta < n.$

В интеграле Римана-Лиувилля сначала производится интегрирование, а затем дифференцирование. Преимуществом определения дробной производной Капуто является более естественное для практических приложений решение проблемы начальных условий при решении интегро-дифференциальных уравнений нецелых порядков.

Отметим, что использовать сходство формул следует с большой осторожностью, поскольку свойства производных (как и интегралов) нецелого порядка существенно отличаются от их целочисленных аналогов.

Так, дробная производная Римана-Лиувилля имеет важный недостаток, касающийся ее использования в приложениях, в частности, дробная производная Римана-Лиувилля от константы не равна нулю:

$$D_t^{\alpha} C = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} C$$

В отличие от дробной производной Римана-Лиувилля, дробная производная Капуто от константы равна нулю:

$$cD_{a,t}^{\beta}C = 0$$

Физический смысл дробной производной Капуто.

Рассмотрим обобщение уравнения Линдблада для квантовых наблюдаемых в виде:

$$cD_t^{\beta} A_t = L_V A_t$$

где, cD_t^{β} – дробная производная Капуто по времени *t*, и

$$L_V A_t = \frac{1}{ih}[H, A_t] - \frac{1}{2h}\sum_{k=1}^{\infty}(V_k^*[A_t, V_k] + [V_k^*, A_t]\, V_k).$$

Для $\alpha = 1$ мы имеем обычное уравнение Линдблада.[1] Если α не целого порядка, то данное уравнение определяет квантовые процессы со степенной памятью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lindblad, G. On the generators of quantum dynamical semigroups / G. Lindblad // Commun. Math. Phys. – 1976. – № 48. – С. 119-130.

2. Oldham, K.B. The Fractional Calculus / K.B. Oldham, J. Spanier. – Academic Press, 1974. – 234 p.

3. Podlubny, I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny // Mathematics in Science and Endineering. – Academic Press, 1999. – Vol. 198. – P. 340.

4. Tarasov, V.E. Quantum Mechanics of Non-Hamiltonian and Dissipative Systems / V.E. Tarasov. – Amsterdam, Boston, London, New York : Elsevier Science, 2008.

5. Васильев, В.В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В. В. Васильев, Л. А. Симак. – Киев : НАН Украины, 2008. – 256 с.